

Perles de Dijkstra

C'est **Niklaus WIRTH** qui proposa vers 1970 le problème à **Edsger DIJKSTRA** : construire une suite de 0, 1, 2 sans séquences adjacentes identiques – en bref, *sans carré*. Dijkstra prit l'image de perles bleues(*B*), blanches(*W*) ou rouges(*R*) – les couleurs du drapeau hollandais – à enfiler sans répétition de séquences adjacentes.

En commençant par *B*, on ne peut pas poursuivre par *B*, prenons *BW*; la perle suivante ne peut pas être *W*, prenons *BWB*. Maintenant seule la perle rouge convient, *BWBR*. Si l'on continue de cette manière « lexicographique » il vient *BWBRBWB* et là on est bloqué, il faut revenir en arrière pour remplacer la dernière perle, *BWBRBWR*. En programmation, c'est le fameux *backtracking* et les délices du GOTO.

Niklaus Wirth ne l'avait pas dit à Edsger Dijkstra : il existe une méthode pour enfiler les perles sans devoir programmer ; méthode découverte en 1906 par le mathématicien norvégien **Axel THUE**. On utilise la *suite de Thue-Morse*, ici notée (t_n) et définie par

$$t_0 = 0; \quad t_{2n} = t_n; \quad t_{2n+1} = 1 - t_n.$$

Ainsi viennent facilement les premiers termes :

$$t_0 = 0; \quad t_1 = 1 - t_0 = 1; \quad t_2 = t_1 = 1; \quad t_3 = 1 - t_1 = 0; \quad t_4 = t_2 = 1; \quad t_5 = 1 - t_2 = 0; \quad \text{etc.}$$

Il est facile d'établir que t_n vaut 0 ou 1, exprimant la parité du nombre de 1 dans l'écriture de n en base 2. On constate également que la suite (t_n) est *sans cube* : on ne rencontre jamais trois fois de suite le même motif. Cette propriété donne la manière d'enfiler les perles :

- si $t_{n-1} = 1$ et $t_n = 0$, c'est *B*;
- si $t_{n-1} = 0$ et $t_n = 1$, c'est *W*;
- enfin si $t_{n-1} = t_n$, c'est *R*.

De la sorte, on tire le début du fil...

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	etc.
t_n	0	1	1	0	1	0	0	1	1	0	0	1	0	1	
		<i>W</i>	<i>R</i>	<i>B</i>	<i>W</i>	<i>B</i>	<i>R</i>	<i>W</i>	<i>R</i>	<i>B</i>	<i>R</i>	<i>W</i>	<i>B</i>	<i>W</i>	

Voici une démonstration de tout cela inspirée de celle de **Carl D. Offner**.

Pour commencer, trois propriétés de la suite de Thue-Morse :

1. Si $t_j = t_{j+1}$ alors $j = 2k + 1$ est impair.
En effet, si $j = 2k$ est pair alors $t_j = t_{2k} = t_k$ et $t_{j+1} = t_{2k+1} = 1 - t_k$. De fait, $t_j \neq t_{j+1}$.
2. Jamais trois termes consécutifs égaux dans (t_n) .
En effet, si on avait $t_j = t_{j+1} = t_{j+2}$ alors on aurait à la fois j et $j + 1$ impairs.
3. Dans cinq termes consécutifs de (t_n) , au moins deux termes consécutifs sont égaux.
Par l'absurde. Les cinq termes seraient 01010 ou 10101, soit en considérant un terme sur deux 000 ou 111. Autrement dit,

$$t_{2k} = t_{2k+2} = t_{2k+4} \quad \text{ou} \quad t_{2k+1} = t_{2k+3} = t_{2k+5}$$

que l'on traduit respectivement par

$$t_k = t_{k+1} = t_{k+2} \quad \text{ou} \quad 1 - t_k = 1 - t_{k+1} = 1 - t_{k+2}$$

Et l'on aurait alors trois termes consécutifs égaux dans (t_n) .

Théorème – *La suite de Thue-Morse est fortement sans cube.*

Autrement dit, il n'existe pas $p \geq 0, q > 0$, vérifiant

$$t_p = t_{p+q} = t_{p+2q} \quad t_{p+j} = t_{p+q+j} \text{ pour tout } j, 0 < j < q.$$

PREUVE – Examinons selon les cas

- ▷ q ne peut pas être égal à 1 d'après la propriété 2.
- ▷ q ne peut pas être impair plus grand que 1. Par l'absurde, comme $q \geq 3$ il y a au moins 7 termes de (t_n) entre t_p et t_{p+2q} et deux sont égaux d'après la propriété 3. Mais comme les éléments entre t_p et t_{p+2q} sont les mêmes que ceux entre t_{p+q} et t_{p+3q} il vient deux paires distinctes d'éléments consécutifs égaux et l'une de ces paires commence à un rang pair puisque les deux paires sont séparées par un nombre impair q de termes. Or t_{2k} est différent de t_{2k+1} d'après la propriété 1.
- ▷ q ne peut pas être pair. Par l'absurde, prenons $q = 2l$ minimal.
 - Si $p = 2k$ est pair alors $t_{2k} = t_{2(k+l)} = t_{2(k+2l)}$ donc $t_k = t_{k+l} = t_{k+2l}$.
 - Si $p = 2k + 1$ est impair alors $t_{2k+1} = t_{2(k+l)+1} = t_{2(k+2l)+1}$ donc $t_k = t_{k+l} = t_{k+2l}$.
 Dans les deux cas, q ne saurait être minimal puisque l vérifie la condition.

Construction d'une suite sans carré

Posons $\delta_n = [t_n t_{n+1}]$, alors (δ_n) est sans carré. En effet, si yy apparaît dans (δ_n) , notons

$$y = \delta_{j+1} \dots \delta_{j+k} = \delta_{j+k+1} \dots \delta_{j+2k}$$

c'est-à-dire

$$y = [t_{j+1} t_{j+2}] \dots [t_{j+k} t_{j+k+1}] = [t_{j+k+1} t_{j+k+2}] \dots [t_{j+2k} t_{j+2k+1}]$$

Ce qui donne

$$t_{j+1} = t_{j+k+1} = t_{j+2k+1} \quad \text{et} \quad t_{j+i} = t_{j+i+k} \text{ pour } 1 \leq i \leq k$$

et de la sorte

$$(t_{j+1} \dots t_{j+k}) (t_{j+1} \dots t_{j+k}) t_{j+1}$$

apparaît dans la suite de Thue-Morse : c'est absurde puisque (t_n) est fortement sans cube.

REMARQUE : dans la suite (δ_n) ,

- ▷ [00] est précédé par [10] et suivi par [01].
- ▷ [11] est précédé par [01] et suivi par [10].

En effet, sinon on aurait trois termes consécutifs égaux dans (t_n) . Par exemple, un prédécesseur de [00] est soit [10], soit [00] – mais dans ce second cas on aurait 000 dans (t_n) .

Perles de Dijkstra

Enfin pour construire la suite (d_n) des perles de Dijkstra on remplace dans (δ_n)

$$[10] \text{ par } B; \quad [01] \text{ par } W; \quad [00] \text{ et } [11] \text{ par } R.$$

Reste à vérifier que (d_n) est bien sans carré comme l'est (δ_n) . En fait (d_n) permet de reconstituer (δ_n) car l'ambiguïté sur R dans (d_n) est facilement levée en considérant prédécesseur ou successeur de R : [00] donne BRW , [11] donne WRB . Si (d_n) n'était pas sans carré, (δ_n) ne le serait pas non plus.